# Aula 4

# PROBABILIDADES:

## EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS E DETERMINÍSTICOS, ESPAÇO AMOSTRAL, PRINCIPAIS EVENTOS, TEOREMA DA SOMA E TEOREMA DO PRODUTO

### META

Trabalhar o que sejam experimentos aleatórios, visto que estes diferentemente dos experimentos determinísticos só têm resultados conhecidos após sua realização.
Como estes experimentos não têm resultado final associado às condições de execução vamos trabalhar o comportamento probabilístico de poderem acontecer em determinado espaço amostral.

### OBJETIVOS

Ao final desta aula, o estudante deverá:
Diferenciar um experimento aleatório do experimento determinístico.
Elaborar espaços amostrais para os experimentos aleatórios.
Trabalhar com os principais tipos de eventos e calcular as probabilidades de ocorrência de eventos associados a experimentos probabilísticos.

### PRÉ-REQUISITO

Conhecimentos de Teoria dos Conjuntos e Análise Combinatória, assuntos que são tratados nesta aula dentro das necessidades dos temas a serem desenvolvidos, além de Papel, Calculadora ou Computador para realização dos cálculos.

# INTRODUÇÃO

Olá! Tudo bem? Vamos sair um pouco da estatística determinística vista até agora com o estudo da estatística descritiva para trabalhar com o conceito mais abstrato do cálculo de probabilidades que envolvem a investigação de experimentos aleatórios.

Historicamente, esta teoria surgiu por volta do século XVII, baseado principalmente nos jogos de azar, como roleta e cartas. Este uso de probabilidade continua fazendo parte da vida da maioria das pessoas que desconhecem as regras para seus cálculos, mas utiliza a probabilidade de ganho em jogos de loterias, bingos, corrida de cavalo etc. Todavia hoje a utilização das probabilidades ultrapassou de muito o âmbito desses jogos. Governos e empresas passaram a incorporar a teoria das probabilidades em suas atividades, dando prioridade a aquelas que apresentam uma relação custo/beneficio maior. Inúmeras são estas situações como, por exemplo: pesquisa de mercado para introdução de um novo produto, previsão de safras, avaliação do impacto de uma redução de impostos sobre a inflação, impacto de campanhas de saúde etc. Tudo isso contém algum elemento de acaso, não se sabe o resultado final, mas com certeza existe uma forte associação com o sucesso dos experimentos de acordo com suas probabilidades.

Sabemos que a utilização das probabilidades indica a existência de um elemento de acaso, ou de incerteza, quanto à ocorrência ou não de um evento. Estes eventos mesmo possuindo determinadas tendências de ocorrências podem levar a distintos resultados, quando repetidos nas mesmas circunstâncias, dificultando dessa maneira a previsão de um resultado futuro. Assim é que, em muitos casos, pode ser virtualmente impossível afirmar o que ocorrerá com determinado experimento.

No entanto embora não seja possível estabelecer a priori os resultados de uma experiência, podem-se prever com certo grau de segurança, seus possíveis resultados. Para isto nesta aula você vai ter a oportunidade de iniciar o estudo de probabilidades passo a passo, construindo espaços amostrais, além de elaborar cálculo de tendência de ocorrência de eventos, aplicando inclusive alguns teoremas básicos do estudo de probabilidades.

## EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS E DETERMINÍSTICOS

Podemos distinguir dois tipos de experimentos. Observe as seguintes situações:

1. Experimentos do tipo I: Uma injeção contendo uma substância letal, altamente eficaz, que tem efeito em apenas 10 minutos, é aplicada em 10 cobaias. Após duas horas, o número de sobreviventes é contado.

2. Experimentos do tipo II:
a) Jogar uma moeda e observar a face voltada para cima.
b) Medir o tempo de sobrevida de um paciente com câncer, após aplicação de quimioterapia.

Podemos dizer que no experimento I, o resultado é conhecido à priori, ou seja, antes de se realizar o experimento. Assim, fatalmente não haverá sobreviventes no primeiro exemplo. Esses experimentos são chamados determinísticos e não são de interesse do ponto de vista da probabilidade.

Já os experimentos do tipo II são chamados aleatórios e, por mais que nos esforcemos em prever o resultado, ele só é determinado após a realização do experimento. Portanto, os experimentos aleatórios são aqueles que repetidos sob as mesmas condições podem levar a resultados distintos. Estes sim, são objetos de interesse da Teoria da Probabilidade.

## ESPAÇO AMOSTRAL (S)

São todos os resultados possíveis de um experimento.
Exemplo I: Nascimento de uma criança quanto ao sexo. S = {M, F}.
Exemplo II: Nascimento de duas crianças quanto ao sexo: S = {MM, MF, FM, FF}.
Exemplo III: Nascimento de três crianças quanto ao sexo:
S = {MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF}.
Exemplo IV: Lançamento de um dado: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Exemplo V: Lançamento de dois dados:
S = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}.

## EVENTOS

São subconjuntos do Espaço Amostral.

**Principais Eventos**

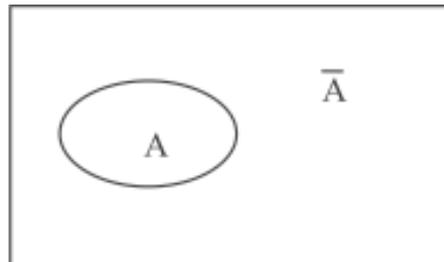
**1. Evento Impossível:** É aquele que não ocorre em nenhuma prova do experimento.
Exemplo: No lançamento de um dado verificar o número de elementos do seguinte evento: A = {xi / xi > 6} => A = { } - A não possui elementos.

**2. Evento Certo:** É aquele que ocorre em qualquer prova de experimento.
Exemplo: No lançamento de um dado verificar o número de elementos do seguinte evento: A = {xi / xi <7} => A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - Evento igual ao Espaço Amostral.

**3. Evento complementar:** Dado um evento A, o evento complementar de A, denotado por $\overline{A}$, é formado por todos os elementos do espaço amostral que não estão em A. Ver diagrama abaixo:

É imediato observar que:

i) $A \cup \overline{A} = S$ (espaço amostral)

ii) $A \cap A = \phi$

## CONCEITO DE PROBABILIDADE

**Probabilidade** – É o grau de confiança que se tem na ocorrência de um determinado evento.

Seja S um espaço amostral finito e A um evento qualquer, então a probabilidade de ocorrer A é: P(A) = n(A) / n(S)

n(A): É o número de casos favoráveis ao evento procurado, enquanto n(S): É o número total de elementos do espaço amostral, relativo ao evento investigado.

Essa probabilidade deve satisfazer as seguintes condições:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$ - Limites do calculo de probabilidade para evento Impossível (0) e evento certo (1).
b) P(S) = 1
c) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**TEOREMA DA SOMA:** se A e B são dois eventos quaisquer retirados de um mesmo espaço amostral eles podem ser: Mutuamente Exclusivos ou Não Mutuamente Exclusivos.

**1. Eventos mutuamente exclusivos**

Dois eventos A e B são considerados mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles impossibilita a ocorrência do outro evento, isto é eles não podem ocorrer ao mesmo tempo. Eventos complementares são sempre mutuamente excludentes, mas a recíproca nem sempre é sempre verdadeira.

Para dois eventos A e B, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Para três eventos A, B e C, temos: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Exemplo: Um grupo de alunos é formado por 10 alunos nascidos no município de Simão Dias, 6 no de Poço Verde e 4 em Tobias Barreto. Escolhendo ao acaso um aluno qual a probabilidade que ele tenha nascido em Simão Dias ou em Tobias Barreto.

Seja: A{Aluno nascido em Simão Dias} e B{Aluno nascido em Tobias Barreto}

Estes eventos são mutuamente exclusivos, sendo escolhido aleatoriamente um de Simão Dias, automaticamente não ocorre aluno de Tobias Barreto e vice-versa.

Neste caso a probabilidade procurada é a seguinte:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $P(A \cup B) = 10/20 + 4/20 = 14/20 = 0,7 = 70\%$

**2. Eventos não mutuamente exclusivos**

Dois eventos A e B são considerados não mutuamente exclusivos quando pode ocorrer ao mesmo tempo, isto é: existe um ou mais elementos comuns a estes eventos, formando uma intercessão entre os mesmos.

Dois eventos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Três eventos: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Exemplo: Num grupo de 100 pessoas, 80 tem sangue Rh positivo, 45 tem sangue tipo “O” e 35 tem sangue “O” com RH positivo. Escolhendo ao acaso, uma pessoa deste grupo, qual a probabilidade de seu sangue ser do tipo “O” ou ter Rh positivo?

Seja: A{Sangue tipo O} = 45 pessoas e B{Sangue com Rh positivo} = 80 pessoas

$P(A \cap B)$ – Intercessão dos eventos A e B, neste caso formada por 35 pessoas.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 45/100 + 80/100 - 35/100 = 90/100 = 0{,}90 = 90\%$

**TEOREMA DO PRODUTO:** a probabilidade de dois e mais eventos ocorrerem simultaneamente em determinado espaço amostral é igual ao produto das probabilidades destes eventos, considerando o fato dos eventos serem Condicionados ou Independentes.

### 1. Eventos Condicionados

São aqueles em que a probabilidades de ocorrência destes eventos está vinculado a ocorrência de um ou mais eventos. Os eventos condicionados são sorteados sem reposição do evento escolhido, deste modo às probabilidades de ocorrências desses eventos em cada prova do experimento são sempre diferentes. Sejam A e B dois eventos, denota-se P(B/A) a probabilidade condicionada do evento B quando A tiver ocorrido, isto é:

$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$ ou $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$

Para três eventos: $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B/A) * P(C/A \text{ e } B)$

Exemplo: De 8 alunas de uma classe, 3 tem olhos negros. Se duas delas são escolhidas ao acaso, qual é a probabilidade de ambas terem olhos negros?

Seja: {primeira aluna com olhos negros} e B{segunda aluna com olhos negros}

$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = 3/8 * 2/7 = 6/56 = 0{,}1071 = 10{,}71\%$

### 2. Eventos Independentes

São aqueles que podem ocorrer ao mesmo tempo, isto é: a probabilidade de um deles ocorrer não fica condicionada a que o outro tenha ou não ocorrido e vice-versa. Estes eventos são aleatoriamente escolhidos com reposição do evento sorteado, deste modo às probabilidades de ocorrências dos eventos em qualquer prova do experimento é sempre a mesma, visto que o espaço amostral desses eventos continua sempre com o mesmo número de elementos.

Dois eventos A e B, de S, são independentes se e somente se:
P(A/B) = P(A) e P(B/A) = P(B)
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

Exemplo: De 8 alunas de uma classe, 3 tem olhos negros. Se duas delas são escolhidas ao acaso com reposição da aluna sorteada, qual é a probabilidade de ambas terem olhos negros?

Seja: {primeira aluna com olhos negros} e B{segunda aluna com olhos negros}
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ $P(A \cap B) = 3/8 * 3/8 = 9/64 = 0{,}1406 = 14{,}06\%$

## ATIVIDADES

1. Uma caixa com 20 latas de óleo de arroz contém 4 com peso líquido abaixo do especificado e 16 de acordo com a especificação. Três latas são escolhidas ao acaso, sem reposição, e classificadas.
a) Qual a probabilidade de que seja encontrada exatamente 1 lata com peso líquido abaixo do especificado?
b) Qual a probabilidade de se encontrarem pelo menos duas latas com peso líquido abaixo do especificado?

2. De 8 alunas de uma classe, 3 tem olhos azuis. Se duas delas são escolhidas ao acaso, qual é a probabilidade de:
a) Ambas terem olhos azuis?
b) Nenhuma ter olhos azuis?
c) Pelo menos uma ter olhos azuis?

3. Uma gaveta contém 5 pares de meias verdes e 3 de meias azuis. Tiramse 2 meias ao acaso. Qual a probabilidade de se formar:
a) um par verde?
b) um par de meias da mesma cor?
c) um par com meias de cores diferentes?

4. Em uma cidade onde se publicam três jornais A, B e C, constatou-se que entre 1000 famílias, assinam: A: 470, B: 420, C: 315, A e B: 110, A e C: 220, B e C: 140 e 75 assinam os três. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual a probabilidade de que ela:
a) não assine nenhum dos jornais?
b) assine apenas um dos três jornais?

c) assine pelo menos dois jornais?

5. Em uma universidade, 40% dos estudantes praticam futebol e 30% praticam natação. Dentre os que praticam futebol, 20% praticam também natação. Qual o percentual de estudantes que não pratica nenhum dos dois esportes?

6. Num grupo de 100 pessoas, 80 tem sangue RH positivo, 45 tem sangue tipo "O" e 35 tem sangue "O" com RH positivo. Escolhendo ao acaso, uma pessoa deste grupo, qual a probabilidade de seu sangue ser do tipo "O" ou ter RH positivo?

7. A probabilidade de que João resolva determinada questão é 1/5, e a de que José resolva é 1/4. Se ambos tentarem independentemente resolver a questão, qual a probabilidade de que a mesma seja resolvida?

8. Uma companhia de seguros vendeu apólices a 5 pessoas, todas da mesma idade e com boa saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa daquela idade esteja viva daqui a 30 anos é de 2/3. Calcular a probabilidade de que daqui a 30 anos:
a) exatamente 2 pessoas estejam vivas.
b) todas as pessoas estejam vivas.
c) pelo menos 3 pessoas estejam vivas.

9. Nas galinhas andaluzas, a prole de duas aves azuis é preta, azul e branca na proporção de 1:2:1. Num lote de 20 frangos oriundos de duas aves azuis, qual a probabilidade de tirarmos dois frangos azuis?

10. As probabilidades de três médicos obterem sucesso em um exame são respectivamente 2/3, 4/5 e 7/10. Se cada um realiza o exame uma única vez, qual a probabilidade de apenas 1 obter sucesso na tarefa executada?

11. Uma sala possui 3 soquêtes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão boas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso e colocam-se as mesmas nos bocais. Qual a probabilidade de que: a) todas acendam? b) pelo menos uma lâmpada acenda?

12. Uma urna contém 4 bolas brancas, 4 bolas vermelhas e 2 pretas. Outra contém 5 bolas brancas, 3 vermelhas e 3 pretas. Extrai-se uma bola de cada urna. Qual a probabilidade de que sejam da mesma cor?

13. Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 azuis. Uma outra contém 4 bolas brancas e 5 azuis. Passa-se uma bola da primeira para Segunda urna,

e em seguida, extrai-se uma bola da Segunda urna. Qual a probabilidade de ser branca?

14. Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 vermelhas e a outra urna contém 4 bolas brancas e 5 vermelhas. Uma urna é escolhida aleatoriamente e uma bola é retirada e colocada na outra urna; então, uma bola é retirada da Segunda urna. Encontre a probabilidade de:
a) ambas serem da mesma cor
b) ambas serem de cores diferentes.

## CONCLUSÃO

Com esta aula, você deve ser capaz de entender o que é um experimento aleatório e qual sua diferença para experimentos determinísticos. Vai entender que experimentos probabilísticos ou aleatórios são aqueles cujos resultados podem não ser os mesmos, ainda que sejam repetidos sob condições essencialmente idênticas. Porém muito embora não se possa afirmar que resultado particular ocorrerá é sempre possível descrever o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento.

Também será capaz de gerar espaços amostrais de experimentos, bem como dominar o conceito de eventos e como cada um deles pode ser investigado. Vai perceber que o estudo das probabilidades é útil porque auxiliam a desenvolver estratégias em busca das decisões mais acertadas. Decisões estas que estão associadas às chances de ocorrência destes eventos.

Vai saber calcular a probabilidade de ocorrência de qualquer evento, bem como usar os teoremas de soma e produto de probabilidades para investigar a possibilidade de ocorrência de dois ou mais eventos.

Saberá diferenciar eventos mutuamente exclusivos daqueles que não são mutuamente exclusivos, bem como eventos condicionados a um ou mais eventos daqueles que são independentes.

Tendo domínio sobre toda esta base inicial do cálculo de probabilidade, você vai encontrar facilidade na aplicação do estudo das probabilidades, principalmente naqueles experimentos mais afins a sua área de estudo ou trabalho.

No final da aula temos uma lista de exercícios para serem resolvidos em grupos de no máximo cinco pessoas ou individual. Com certeza você vai ficar muito satisfeito com os resultados do seu desempenho.

## RESUMO

No ensino de probabilidade, devemos considerar que nosso papel como professor de estatística é levar o aluno a compreender a importância da probabilidade nas tomadas de decisões mais acertadas por parte de governos, empresas, sociedade e família, bem como por você. Além disto, ela é bastante útil para melhorar a capacidade de raciocínio, visto que você passa a trabalhar com hipóteses com forte tendência de acontecer, mas que ao mesmo tempo não lhe dar a certeza de que o resultado do experimento seja esta tendência, diferente, em termos de resultado, de tudo que foi visto até agora com a estatística descritiva.

Em qualquer espaço amostral existem eventos em situações diferenciadas de serem realizados, com maior tendência para os de maior probabilidade, mas nada impede que os eventos de baixa probabilidade não possam ocorrer. É o que se passa com jogos de azar, como por exemplo, as loterias. Quem mais aposta tem grande probabilidade de ganhar, mas quando menos se espera alguém que faz uma aposta mínima é o premiado. Que ocorreu: apenas um acaso, a pessoa tem muita sorte. O certo é que existia uma probabilidade de ocorrência e esta aconteceu.

Com o estudo da probabilidade você vai melhor entender como se movimentam as atividades econômicas e sociais de um grande agregado ou mesmo de uma família. Também a natureza se faz presente de forma diferenciada a depender da maior probabilidade de ocorrência de certa característica que de certa forma passa a ser esperada pela tendência histórica daquele movimento.  Esta mesma tendência poderá acontecer por tipo de cultivo, no mercado ou nos costumes de cada pessoa e das sociedades. Enfim o estudo das probabilidades está associado às situações em que os resultados são igualmente prováveis, desde que não exista nenhum viés nesse experimento.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Sou capaz de diferenciar um experimento determinístico do experimento aleatório?

Sou capaz de construir Espaços Amostrais de experimentos probabilísticos?

Sou capaz de calcular probabilidades de ocorrência de eventos probabilísticos?

## PRÓXIMA AULA

Estudo das Probabilidades, envolvendo o Teorema de Bayes, Variável Aleatória e Distribuições de variáveis Aleatórias Discretas.

## REFERÊNCIAS

RODRIGUES, PEDRO CARVALHO. **Bioestatística**. Universidade Federal Fluminense.

FONSECA, JAIRO DA. **Curso de Estatística**. Editora Atlas.

OLIVEIRA, FRANCISCO ESTEVAM MARTINS DE. **Estatística e Probabilidade**. Editora Atlas.

TANAKA. **Elementos de Estatística**. Editora McGraw.Hill.

BARBETTA, PEDRO A. **Estatística splicada às Ciências Sociais**. Editora da UFSC.

GÓES, LUIZ A. C. **Estatística I e II**. Editora Saraiva.

DÍAZ, FRANCISCA; LOPES, FRANCISCO JAVIER. **Bioestatística**. Editora Thomson.